DYNAMIQUE ARITHMÉTIQUE
MAT 661 – M2 AAG (HIVER 2021)
HAUTEURS DYNAMIQUES

CHARLES FAVRE

1. Corps métrisés

(A.1) Montrer que tout norme archimédienne sur $\mathbb{Q}$ est égale à $|\cdot|^\epsilon$ pour un $\epsilon \in (0,1]$ où $|\cdot|$ est la norme euclidienne standard.

(A.2) On définit $\mathbb{Z}_p$ comme la complétion pour la norme p-adique de $\mathbb{Z}$.
- Montrer que le morphisme de réduction $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(p)$ s'étend en un morphisme $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/(p)$ et déterminer son noyau.
- Montrer que pour tout $n \geq 1$ nous avons un morphisme canonique $\pi_n \colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/(p^n)$ et déterminer son noyau.
- En déduire que tout nombre $x \in \mathbb{Z}_p$ il existe une unique suite $x_i \in \{\ 0, \cdots, p-1\}$ telle que x est égal à la somme de la série convergente $x_0 + px_1 + p^2x_2 + \cdots$.
- Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est compact.

(A.3) Montrer que $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ n'est pas complet. A cet effet introduire $F_n = \{x \in \mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}, \deg(x) \leq n\}$, et montrer que F_n est un ensemble fermé d'intérieur vide. Conclure en utilisant le théorème de Baire.

(A.4) Soit K un corps métrisé non-archimédien complet, et K^{alg} une clotûre algébrique de K. On rappelle que K^{alg} est muni d'une unique norme qui étend la norme initiale sur K.

Montrer que le corps résiduel de K^{alg} est une clotûre algébrique du corps résiduel de K.

(A.5) Soit K un corps métrisé non-archimédien complet.
- On suppose K est localement compact. Montrer que $K^\circ = \{|z| \leq 1\}$ est compact puis que $K^{\circ\circ} = \{|z| < 1\}$ l'est aussi.
- En déduire que $\tilde{K}$ est fini, et que $|K^*|$ est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
- On suppose maintenant que $\tilde{K}$ est fini et que $|K^*|$ est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. Justifier l'existence de $\pi \in K^{\circ\circ}$ tel que $|K^*| = |\pi|^{\mathbb{Z}}$, et montrer que $K^{\circ\circ} = (\pi)$.

Date: 15 mars 2021.

— Montrer que l'anneau quotient $K^\circ/(\pi^n)$ est fini pour tout n puis que les morphismes $r_n \colon K^\circ \to K^\circ/(\pi^n)$ induisent un isomorphisme de K° sur $\operatorname{proj\,lim}_n K^\circ/(\pi^n)$.
— Conclure que K est localement compact.

(A.6) Lemme de Krasner. Soit x un élément algébrique de $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$. Notons $r(x) > 0$ le minimum $|x-y|_p$ pour $y \neq x$ dans l'orbite de Galois de x.
— Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ tel que $|x-z| < r(x)$ alors $\mathbb{Q}_p(x) \subset \mathbb{Q}_p(z)$. On utilisera le fait qu'il existe une unique extension de la norme p-adique à $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$.
— Soit $P(T) = T^n + \sum_0^{n-1} a_k T^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ et irréductible dans $\mathbb{Q}_p[T]$. Soit $x \in \mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ l'une de ses racines. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que tout polynôme $Q(T) = T^n + \sum_0^{n-1} b_k T^k$ avec $|a_k - b_k| \leq \epsilon$ admet une racine y telle que $\mathbb{Q}_p(x) = \mathbb{Q}_p(y)$.

(A.7) — Un polynôme d'Eisenstein est un polynôme $P(T) = T^n + \sum_0^{n-1} a_k T^k$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ vérifiant $P \equiv T^n$ modulo p et $P(0) \neq 0$ modulo p^2. Montrer que tout polynôme d'Eisenstein est irréductible dans $\mathbb{Z}_p[T]$ et dans $\mathbb{Q}_p[T]$.
— Montrer que pour tout n, le polynôme $X^n - p$ est irréductible sur $\mathbb{Q}_p$. En déduire que $|\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}} : \mathbb{Q}_p] = \infty$.
— Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ telle que $[\tilde{K} : \tilde{\mathbb{Q}_p}] = 1$. Montrer que K est engendré par une racine d'un polynôme d'Eisenstein.
On montrera l'existence de π tel que $K = \mathbb{Q}_p[\pi]$ et $|K^*| = |\pi|^{\mathbb{Z}}$.

2. Hauteurs

(B.1) Donner une borne explicite en termes de d et N sur le nombre de points $x \in \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ tels que $\deg(x) \leq d$ and $h(x) \leq N$.

(B.2) On définit $c(N) = \operatorname{Card}\{x \in \mathbb{Q}, h(x) \leq N\}$. Trouver des constantes b_1, b_2 telles que $b_1 N^2 \leq c(N) \leq b_2 N^2$, et montrer que $c(N)/N^2 \to \pi^2/6$ lorsque $N \to \infty$.

(B.3) On rappelle la première possibilité pour définir la hauteur $x \in \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ de telle sorte que
$$\bar{h}(x) := \frac{1}{\deg(x)} \log \max\{|a_0|, \ldots, |a_d|\}$$
où $a_0 T^d + \ldots + a_d$ est le polynôme minimal de x avec $a_i \in \mathbb{Z}$ and $\gcd\{a_i\} = 1$. Montrer que $|h(x) - \bar{h}(x)|$ est borné par une constante universelle (indépendante de d).

(B.4) Calculer la hauteur de $\sqrt{2}$ et $2+i$.